Многомерный комплексный анализ 25.11.2011

1. Известно, что любой голоморфный автоморфизм комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (то есть, биголоморфное отображение из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$) является аффинным отображением $z \mapsto az + b$, где a, b – комплексные постоянные. Приведите пример неаффинного голоморфного автоморфизма пространства $\mathbb{C}^2$.

2. Для $r \in [0, 1]$ рассмотрим гиперболический восьмиугольник $\triangle$ с вершинами в точках $re^{k\pi i/4}$, $k = 0, \ldots, 7$ как подмножество единичного круга $\mathbb{D}$. (Сторонами гиперболического многоугольника являются дуги окружностей, ортогональных границе D.)

а) Найдите такое значение r_0, для которого внутренние углы $\triangle$ равны $\pi/4$.

б) Определите голоморфный автоморфизм T единичного круга D, отображающий r_0 в $r_0 e^{3\pi i/4}$ и $r_0 e^{\pi i/4}$ в $r_0 e^{\pi i/2}$.

в) Обозначим через σ отображение вращения $z \mapsto ze^{\pi i/4}$. Покажите, что $\triangle$ является фундаментальной областью группы Γ, порожденной автоморфизмами $S_k = \sigma^k T \sigma^{-k}$, $k = 0, 1, 4, 5$.

г) Вычислите род компактной римановой поверхности $\mathbb{D}/\Gamma$.

3. Определите все полярные дивизоры мероморфной формы

$$\omega = \Gamma(z_1) \cdot \ldots \cdot \Gamma(z_n)\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n.$$

Для каких компактных n-мерных циклов $\gamma \subset \mathbb{C}^n$ интеграл $\int\limits_\gamma \omega$ отличен от нуля? Вычислите данный интеграл для всех таких циклов.

4. Для полиномиального отображения $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $f_1(z) = z_1^5 + z_2^3 + z_3^2 - 1$, $f_2(z) = z_1^2 + z_2^2 + z_3 - 1$, $f_3(z) = z_1^6 + z_2^5 + z_3^3 - 1$ вычислите глобальный многомерный вычет $\mathrm{res}_f(z_1^4 z_2 z_3^2)$. Здесь

$$\mathrm{res}_f(h(z)) := \sum_{a \in Z(f)} \mathrm{res}_{\substack{f\\ z=a}} \left(\frac{h(z)\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{f_1(z) \ldots f_n(z)} \right),$$

$Z(f) = \{a \in \mathbb{C}^n : f_j(z) = 0,\ j = 1, \ldots, n\}$.

5. Для всех $j = 1, \ldots, n$ вычислите интеграл

$$(2\pi i)^{-n} \int\limits_{\substack{|z_1| = 2,\\ |z_2| = \ldots = |z_n| = 1}} z_j \frac{\partial \log f(z)}{\partial z_j} \frac{dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{z_1 \cdot \ldots \cdot z_n},$$

где $f(z) = 1 + z_1 + \ldots + z_n$.